

# 確率数理工学10

## ○ 確率過程

$T$ : 時間の範囲 ( $\mathbb{R}$ の区間) や 自然数の全体)

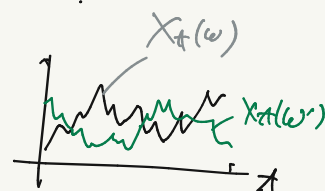
(より一般化して、 $\mathbb{R}^d$ 等の位相空間を考えるとともなう: 時空間ティック)  
をインテックス集合と言う。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間

各  $t \in T$  に 確率変数  $X_t$  が 定まっているとき、

$(X_t(\omega))_{t \in T}$  を 確率過程 (stochastic process) と 言う。

確率過程の定義自体には、各  $\omega \in \Omega$  に  
おける  $t \mapsto X_t(\omega)$  の連続性等の条件は  
入っていないことに注意する。



## • 加法過程 (独立増分過程)

任意の  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  に対し、

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立。

もし、 $X_0 = 0$  で、 $Z_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$  とおくと、 $(Z_i)_{i=1}^n$  は独立。

$$X_{t_n} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

→ 独立な増分の和

↳  
続く。

## Ex. (Brown 運動, Wiener 過程)

(1)  $X_0 = 0$

(2)  $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$  (平均 0, 分散  $s$  の正規分布)

(3)  $(X_t)_t$  は加法過程

(4) ほとんどの全  $\omega$  で  $t \mapsto X_t(\omega)$  は連続

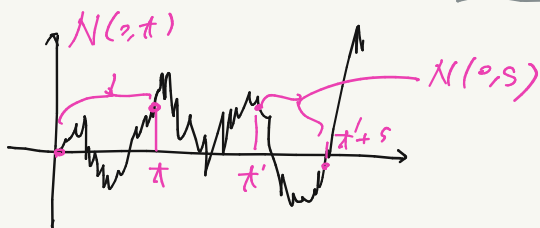
(\*) (2) は  $t, s$  の取り方によらずに値が一定である。(\*)

$s = s_1 + s_2$  のとき,

$$X_{t+s_1} - X_t \sim N(0, s_1), \quad X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1} \sim N(0, s_2)$$

であるから

$$X_{t+s} - X_t = \underbrace{X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1}}_{\sim N(0, s_1)} + \underbrace{X_{t+s_1} - X_t}_{\sim N(0, s_2)} \sim N(0, \underbrace{s_1 + s_2}_s)$$



## Ex. (定常ポアソン過程)

(1)  $X_0 = 0$

(2)  $X_{t+s} - X_t \sim P_0(\lambda s)$  ( $\forall s, t \geq 0$ )

(3)  $(X_t)_t$  は加法過程

\* 二つとも (2) は  $t, s$  の取り方によらずに well-defined.  $\rightarrow$  Poisson 分布の可加性

$$(P_0(\lambda s) + P_0(\lambda t) = P_0(\lambda(s+t)))$$

例えば、イベントの発生間隔が  $Ex(\lambda)$  に独立に

従うとき、時刻  $t$  まで  $n$  回発生するイベントの数は

定常ポアソン過程に従う。

補足

$C(T)$ :  $T$ 上の連続関数全体の集合

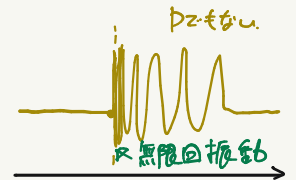
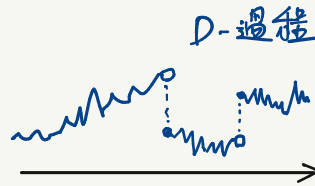
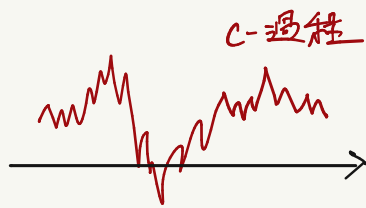
$D(T)$ :  $T$ 上の右連続かつ左極限の存在関数の集合

(continue à droite, limite à gauche: caddlag)

$\forall \omega \in \Omega$  上で  $t \mapsto X_t(\omega) \in C(T)$  (この関数として) なら C-過程

$t \mapsto X_t(\omega) \in D(T)$  なら D-過程

と言う。



ブラウン運動は C-過程, ポアソン過程は D-過程 とおおよそ構成でき.

定理

$\forall \epsilon > 0$  上で  $\lim_{\delta \rightarrow 0} P(|X_t - X_s| \geq \epsilon) = 0$  ( $\forall \epsilon > 0$ ): 確率連続

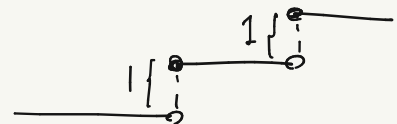
(確率収束の意味で連続)

上で  $X_t$  が D-過程である加法過程のことは、Levy 過程 という

(1)  $X_t$  が Levy 過程でさらに C-過程なら  $X_t - X_s$  ( $t > s$ ) は正規分布に従う  $\rightarrow$  Gauss 過程

(2)  $X_t$  が Levy 過程でさらに a.s. 上で  $X_t(\omega)$  が  $t$  の関数として飛躍  $\uparrow$  で増加する階段関数なら  $X_t - X_0$  は Poisson 分布に従う.

$\rightarrow$  Poisson 過程 (の特別な例)



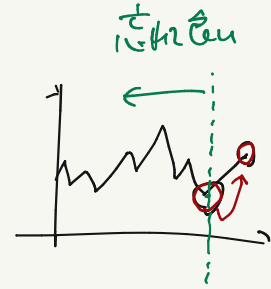
より一般には、 $X_t$  は Gauss 過程 + Poisson 過程 に分解できる.  
(Levy-Ito の分解)

マルコフ過程 (離散時間,  $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ )

$$P(X_{n+1} \in A \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$= \begin{cases} P(X_{n+1} \in A \mid X_n = x_n) & \rightarrow \text{1次マルコフ} \\ P(X_{n+1} \in A \mid X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) & \rightarrow \text{2次マルコフ} \end{cases}$$

次の時刻の分布は直前の値のみで決まる。

それ以前は忘れて良い。



Cor

マルコフ過程なら

$\forall t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_m < n$  に對し、

$$P(X_n \in A \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_m} = x_m) = P(X_n \in A \mid X_{t_m} = x_m) //$$

Cor

加法過程はマルコフ過程である。 //

注: 条件付き確率は厳密には定義してないから。

部分の加法族を用いて厳密に定義可能である。

(正則条件付き確率)

詳しくは Durbin 11 や 伊藤清の本を参照してください。

# マルコフ連鎖

Def (マルコフ連鎖)

←  $X_n$  のとりうる値の範囲  
 離散時間、離散状態 のマルコフ過程を

マルコフ連鎖 (Markov chain) と言う

← 次のように打

マルコフ連鎖の 遷移確率行列 (Transition prob. matrix):

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(i, j) = P_{ij}$$

$$P = (P(i, j))_{i, j} = (P_{ij})_{i, j}$$

$P$  は  $n$  に依存しない ⇒ 斉次マルコフ (以後斉次マルコフしか考へない)

$X_n$  が取りうる範囲を 状態空間 とする

Note  $P_{ij} \geq 0, \sum_j P_{ij} = 1$

Ex. (コイン投げ)

状態空間 = {表, 裏}

前の表か裏かによって: 投げたコインが変わる.

表 → 表 :  $p$

表 → 裏 :  $1-p$

裏 → 表 :  $q$

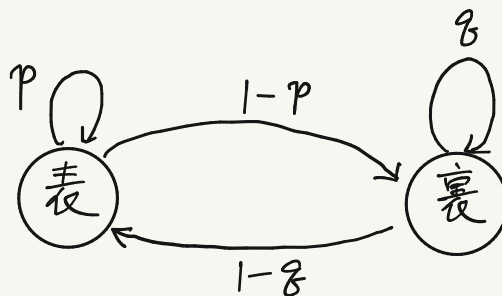
裏 → 裏 :  $1-q$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{表} & \text{裏} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{表} \\ \text{裏} \end{matrix} & \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \end{matrix}$$

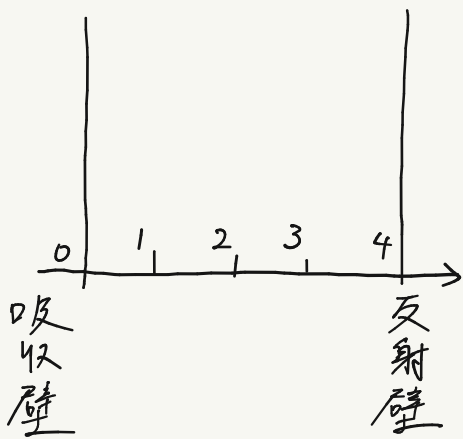
← 時刻  $n$

↑  
時刻  $n-1$

⊗ 方向に注意!!  
 左から右



Ex. (ランダムウォーク)



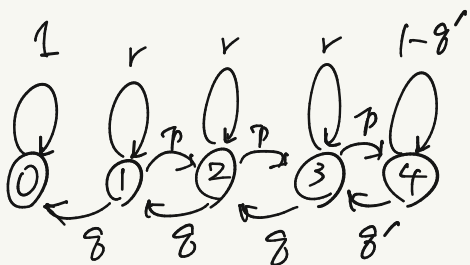
0 ... 吸収壁 (到達すると抜かれない)  
 4 ... 反射壁 (1歩返す)

確率

$$i \neq 0, 4: \begin{cases} i+1 & : p \\ i-1 & : q \\ i & : 1-p-q=r \end{cases}$$

$$i=4: \begin{cases} 3 & : q' \\ 4 & : 1-q' \end{cases}$$

$$i=0: \begin{cases} 0 & : 1 \text{ (吸収壁)} \\ 1 & : 0 \end{cases}$$



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & q' & 1-q' \end{bmatrix}$$

$X_n$ : 時刻  $n$  における状態

$$X_n = i, X_{n+1} = j : P(i, j)$$

$$X_{n+2} = j : P^{(2)}(i, j) = P(X_{n+2} = j | X_n = i)$$

$$= \sum_k P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = k) P(X_{n+1} = k | X_n = i)$$

$$= \sum_k P(i, k) P(k, j)$$

同様 (2) (2).  $P^{(m)}(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} P(X_{n+m} = j | X_n = i)$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} P(i, k_1) P(k_1, k_2) \dots P(k_{m-1}, j)$$

$$\textcircled{\star} P^{(n+m)}(i, j) = \sum_k P^{(n)}(i, k) P^{(m)}(k, j)$$

: Chapman-Kolmogorov の方程式

初期分布:  $P(X_0 = i) = a_i^{(0)}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) とする.

$$P(X_n = j) = \sum_k P(X_n = j | X_0 = k) P(X_0 = k)$$

$$\downarrow = \sum_k a_k^{(0)} p^{(n)}(k, j)$$

$$a^{(n)} = a^{(0)} P^{(n)}$$

$$\uparrow a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots) : \underline{\underline{\text{横ベクトル}}}$$

$\uparrow$   $P(X_n=1)$     $\uparrow$   $P(X_n=2)$

Ex. (Bernoulli 試行)

$X_n = n$  回のコイン投げで表が出現 (成功) 回数

状態空間 =  $\{0, 1, 2, \dots\}$

$p$ : 表の出る確率

$$P_{i, i+1} = p$$

$$P_{i, i} = 1 - p$$

$$P_{i, j} = 0 \quad (j < i, j > i+1)$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccc} 1-p & p & & & \\ & 1-p & p & & \\ & & 1-p & p & \\ & & & 1-p & p \\ & 0 & & & 1-p & p \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$P^n = \left[ \begin{array}{cccc} (-p)^n & \binom{n}{1} (-p)^{n-1} p & \binom{n}{2} (-p)^{n-2} p^2 & \dots \\ & (-p)^n & \binom{n}{1} (-p)^{n-1} p & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & & & \dots \end{array} \right]$$

# 演習問題

(1)  $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$  を独立に  $N(0,1)$  に従う確率変数と仮定する。

$$X_t = t Z_0 + \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} Z_n \quad (t \in [0,1])$$

で定めらる確率過程を考慮する。

(i)  $R(t,s) = E[X_t X_s]$  を計算せよ。

(ii)  $X_t$  の周辺分布を求めよ。

(iii)  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  の特性関数を求めよ。

(iv)  $(X_t)$  が Brown 運動と仮定して確かめよ。 (連続性は示さなくてよい)

(2) 以下の生成モデルを考慮する:

$$Z \sim P_0(\lambda)$$

$Y_i \sim U([0,1])$  を独立同一に  $Z$  個生成

このとき、 $A \in \mathcal{B}([0,1])$  に対し、

$$Z(A) = |\{i \mid Y_i \in A\}| \quad (Y_i \in A \text{ なる } i \in \{1, \dots, Z\} \text{ の個数})$$

の分布を求めよ。

(3) 各日の天気は次の遷移確率を持つマルコフ連鎖に従うと仮定する。

$$P = \begin{array}{c} \text{雨} \\ \text{曇} \\ \text{晴} \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} \text{雨} & \text{曇} & \text{晴} \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{array} \right]$$

今日曜日は曇りであることが観測されたとき、

明日曜日が雨になる確率を求めよ。